

0-755273

*На правах рукописи*

**МАЛЬЦЕВА Татьяна Владимировна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ГРУНТА  
С ПОЗИЦИЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ**

**Специальность 05.13.18-Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ**  
**диссертации на соискание ученой степени**  
**доктора физико-математических наук**



**Казань – 2006**

Работа выполнена на кафедре математики и информатики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Тюменский государственный университет».

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор  
*Мальцев Лев Евгеньевич*

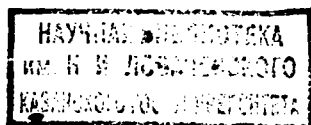
Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор  
*Васильев Виталий Захарович*  
доктор физико-математических наук, профессор  
*Карчевский Михаил Миронович*  
доктор физико-математических наук, профессор  
*Паймушин Виталий Николаевич*

Ведущая организация: Институт математического моделирования РАН

Защита состоится 16 марта 2006 г. в 13.30 на заседании Диссертационного совета Д 212.081.21 Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 430000, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 14 февраля 2006г.



Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к. ф.-м. н., доцент

*Задворнов*

Задворнов О. А.



## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность проблемы.** Объектом исследования является водонасыщенный грунт, поведение которого под нагрузкой описывается с позиций адаптированной механики деформируемого твердого тела и теории линейной наследственной вязкоупругости без учета старения материала.

Промышленное освоение нефтяных и газовых месторождений в Тюменской области, связанное со строительством объектов нефтегазодобывающего комплекса, жилых поселков и подведением к ним дорог, ведется на водонасыщенных глинистых грунтах, на заболоченных и заторфованных территориях, где водосток практически отсутствует. Описание процесса консолидации водонасыщенного грунта с помощью моделей фильтрационной консолидации приводит к тому, что избыточное поровое давление после истечения конечного промежутка времени практически обращается в нуль, затем водонасыщенный грунт рассматривается как однофазный, для описания напряженного и деформированного состояния которого используются модели механики деформируемого твердого тела. На основании натурных экспериментов известно, что суммарные напряжения почти не изменяются во времени, их можно описать с позиций теории упругости. Однако полученные по теории упругости перемещения в несколько раз отличаются от результатов натурального эксперимента, поэтому тема диссертационной работы, связанная с построением и развитием математической модели, описывающей вклад поровой воды в напряженное и деформированное состояние скелета грунта, и обработкой новых лабораторных экспериментов по изучению механических упругих и вязкоупругих свойств этих грунтов является актуальной. Результаты исследований могут быть использованы при проектировании и расчете осадок инженерных объектов, возводимых на слабых основаниях, что обуславливает принятие безопасных и экономичных решений, развитие новых технологий, направленных на усиление несущей способности поровой воды.

Целью диссертационной работы является решение научно-технической проблемы математического моделирования напряженного и деформированного состояния водонасыщенного грун-

та с позиций теории вязкоупругости при описании процесса консолидации и с позиций обобщения теории упругости на двухфазное тело после окончания процесса консолидации, то есть при стабилизированном состоянии среды. Ставятся следующие научные задачи:

1. Построение двух математических моделей в виде систем линейных дифференциальных (упругий вариант) и интегро-дифференциальных уравнений (вязкоупругий вариант). Получение фундаментальных решений типа Фламана и Буссинеска, которые после переобозначений (принцип Вольтерра) одновременно являются фундаментальными решениями интегро-дифференциальных уравнений в изображениях по Лапласу — Карсону.

2. Разработка аналитических (в упругом варианте модели) и численно-аналитических (в вязкоупругом варианте) методов решения краевых задач для двухфазного полупространства и двухфазной полуплоскости, основанных на новых фундаментальных решениях.

3. Исследование свойств построенного обобщенного дифференциального оператора Ляме и их формулировки в виде основных теорем для двухфазного тела.

4. Исследование существования и единственности обобщенного решения статической смешанной краевой задачи для двухфазного тела.

5. Разработка методик определения параметров (материальных постоянных и функций времени) моделей, описывающих упругие или вязкоупругие свойства двухфазной среды по результатам одномерных, лотковых и натурных испытаний.

**Методы исследования.** При анализе полученных математических моделей и решений краевых задач применяются функциональный анализ, методы математической физики, теорий упругости и вязкоупругости.

Количественный анализ изучаемой проблемы осуществляется по аналитическим решениям с использованием современных математических программных продуктов.

**Научная новизна** работы состоит в том, что

1. Упругие варианты математических моделей двухфазной среды описываются системами двух и трех линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, которые отличаются от известных уравнений Ляме дополнительными слагаемыми,

отражающими разгружающий вклад поровой воды. Полученный несимметричный дифференциальный оператор назван обобщенным оператором Ляме.

2. Показана положительная определенность обобщенного оператора Ляме для ограниченной односвязной пространственной области с кусочно гладкой границей. Доказано существование и единственность обобщенного решения статической смешанной краевой задачи для двухфазного тела.

3. Несимметричность обобщенного оператора Ляме привела:

а) к отсутствию взаимности работ в двухфазном теле (аналог формулы Бетти);

б) к билинейному функционалу (помимо квадратичного) при описании энергии деформации (аналог формулы Клапейрона);

в) к новым формулам типа Грина, отвечающим билинейному функционалу, которые появились при анализе приращения энергии деформации.

4. Фундаментальные решения Фламана для упругой однофазной полуплоскости и Буссинеска для упругого однофазного полупространства аналитически разложены на две фазы. Показано, что разложение решения Фламана на две фазы совпадает с точным решением системы обобщенных дифференциальных уравнений Ляме. Разложение решения Буссинеска выполнено приближенно. Фундаментальные решения применены для аналитических расчетов двухфазных плоских и пространственных оснований, нагруженных площадными фундаментами с изучением их взаимных влияний.

5. Разложения фундаментальных решений Фламана и Буссинеска представлены в вязкоупругом варианте. В соответствии с методами, предложенными А. А. Ильюшиным и П. М. Огибаловым, решение вязкоупругих задач разбивается на два этапа: упругий и вязкоупругий. На втором этапе для фиксированной точки пространственных координат приближенный аналитический переход от решения в изображениях по Лапласу-Карсону к решению в оригинале осуществляется по предложенной модификации метода ломаных, которая позволила получить немонотонные оригиналы.

6. Созданы методики определения механических постоянных и немонотонных функций времени (параметров моделей) по результатам одно-, двумерных лабораторных и натурных экспериментов.

**Достоверность защищаемых положений** обеспечивается:

- применением строгих математических методов исследования и решения, возникающих в работе дифференциальных уравнений;
- сравнением полученных в работе теоретических результатов в виде теорем с известными фундаментальными положениями теорий упругости и вязкоупругости;
- сопоставлением результатов численных и аналитических решений а) с данными лабораторных и натурных экспериментов, б) с известными решениями по другим моделям.

**Практическая значимость.**

На основании предложенных математических моделей (упругие варианты) проведено научное обоснование расчетов напряженного и деформированного состояния двухфазных оснований из водонасыщенных грунтов при разных плоских или пространственных нагрузках на дневной поверхности и для сочетаний нагрузок (взаимное влияние фундаментов). Приведены результаты расчетов во времени напряженных и деформированных состояний двухфазных оснований, нагруженных различными видами нагрузок. Получены расчетные формулы для окончательных осадок, отвечающих стабилизированному состоянию оснований, минуя описание процесса консолидации, что отвечает запросам проектировщиков. Во всех расчетах показано разгружающее влияние поровой воды на уменьшение напряжений и деформаций, возникших в скелете грунта. Приведены примеры использования методик обработки результатов лотковых и натурных испытаний.

**На защиту выносятся**

- 1) математические модели в виде двух- и трехмерных систем линейных дифференциальных уравнений, которые отличаются от уравнений Ляме дополнительными слагаемыми в каждом уравнении, и соответствующие им системы интегро-дифференциальных уравнений;
- 2) свойства обобщенного оператора Ляме: а) доказательство существования и единственности обобщенного решения краевой задачи; б) следствия несимметричности оператора, сформулированные в виде аналогов теорем Бетти, Клапейрона, формул Грина;
- 3) фундаментальные решения типа Фламана и Буссинеска для двухфазного тела и основанные на них решения частных задач, вязкоупругие варианты фундаментальных решений;

усовершенствование метода ломаных, позволяющее получать немонотонные оригиналы;

4) методики определения параметров моделей по результатам лабораторных и натурных экспериментов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы доложены и обсуждены на: II Всероссийской научно-практической конференции «Моделирование технологических процессов бурения, добычи нефти и газа и обустройства сопровождающих объектов на основе современных технологий» (ТГНГУ, Тюмень, 2000); научно-практической конференции «Актуальные проблемы строительства и экологии Западно-Сибирского региона» (ТГАСА, Тюмень, 2000); Международном научном симпозиуме «Упругость и неупругость» по проблемам механики деформируемых тел, посвященном 90-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 2001); Международном совещании заведующих кафедрами «Механика грунтов, оснований и фундаментов», «Инженерная геология и геоэкология», «Подземные сооружения» (МГСУ им. В.В. Куйбышева, Москва, 2002); городском научном семинаре НИИ оснований и подземных сооружений (Москва, 2002); научно-техническом семинаре факультета «Мосты и тоннели» Государственного университета путей сообщения (С.-Пб, 2003); городском научном семинаре кафедры «Механика многофазных сред» Государственного университета (Тюмень, 2003); 60-ой Всероссийской конференции «Научно-технические проблемы в строительстве» Государственного строительного университета (Новосибирск, 2003); на научном семинаре отдела механики деформируемого твердого тела института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева (Новосибирск, 2003); Международной научной школе «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (Саранск, 2003); научном семинаре кафедры «Механика композитов» Московского государственного университета (Москва, 2003); научном семинаре института Математического моделирования РАН (Москва, 2003); научном семинаре кафедры «Прикладная математика» Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева (Саранск, 2004); научном семинаре лаборатории «Механика пористых сред» НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета (Казань, 2004); XVII сессии Международной научной школы по моделям механики сплошной среды

(Казань, 4-10 июля 2004г.); научном семинаре кафедр вычислительной математики и теоретической механики Казанского государственного университета (Казань, 2005).

**Публикации.** По материалам исследований опубликовано 32 научные работы, список которых приведен в конце автореферата, в том числе в соавторстве одна монография и патент на изобретение, 13 работ — в журналах из перечня, рекомендованных ВАК РФ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения, содержит 240 страниц, 65 рисунков, библиографию из 124 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы. Сформулированы цели и задачи представленного научного исследования с кратким описанием полученных результатов.

**В первой главе** проанализированы классические, современные модели и различные подходы, в том числе и экспериментальные (Амарян Л. С., Бугров А. К., Голли А. В., Зехниев Ф. Ф., Воронцов В. В., Демин В. А., Набоков А. В. и др.), к моделированию напряженного и деформированного состояния водонасыщенных (двухфазных) грунтов. Согласно натурному эксперименту на расстоянии от дневной поверхности более одного метра для глины и полутора метров для торфа имеются остаточные избыточные поровые давления после окончания процесса консолидации грунта. Моделями теории упругости и пластичности (Соколовский В. В., Горбунов-Посадов М. И., Малышев М. В., Ломизе Г. М., Крыжановский А. Л. и др.) это поровое давление не описывается, потому что грунт рассматривается однофазным. По линейным фильтрационным моделям (Терцаги К., Герсеванов Н. М., Био М., Флорин В. А., Зарецкий Ю. К., Тер-Мартirosян З. Г. и др.) остаточные избыточные поровые давления обращаются в нуль.

По вязкоупругому варианту кинематической модели (однотермный случай), предложенной Мальцевым Л. Е., экспериментальная кривая порового давления  $\sigma^l$  описывается практически точно ломаной линией (рис. 1).



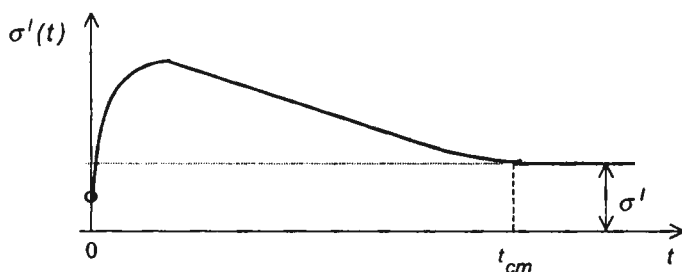


Рис. 1. Качественный характер кривой изменения порового давления во времени.

Здесь  $t_{cm}$  — начальный момент времени стабилизации, например, при испытании образца высотой в 1м из водонасыщенной глины процесс консолидации закончился в момент  $t_{cm} = 95 \text{ сут}$ . На графике горизонтальная полка соответствует остаточному избыточному поровому давлению. Штриховая линия продолжает горизонтальную полку до начального значения времени. Упругий вариант кинематической модели отвечает замене действительного графика на горизонтальную полку, отвечающую остаточному избыточному поровому давлению  $\sigma'(t > t_{cm})$ , до начального (нулевого) момента времени. В упругом варианте модели отсутствует время.

В вязкоупругом варианте кинематической модели решение разбивается на два этапа: 1) находится решение соответствующей задачи в упругой постановке; 2) вводится система переобозначений (принцип Вольтерра) и для фиксированной точки пространственных координат осуществляется приближенный переход от изображения к оригиналу по методу ломаных, согласно которому составляется система линейных алгебраических уравнений, ее порядок совпадает с числом звеньев ломаной линии. Разбиение на два этапа позволяет на первом этапе в ряде случаев получать аналитическое решение задачи за счет отсутствия времени.

В нелинейных фильтрационных моделях (Флорин В. А., Костерин А. В. и др.), в которых учитывается начальный градиент порового давления, вводятся две зоны — активная и пассивная, в последней фильтрация воды отсутствует. Нахождение границы, разделяющей две зоны и движущейся во времени, значи-

тельно осложняет решение задачи, но по-прежнему, не учитывается вклад остаточных избыточных поровых давлений в деформированное состояние двухфазного тела.

Таким образом, кинематическая модель в отличие от фильтрационных описывает остаточное избыточное поровое давление и его влияние на деформацию скелета грунта при стабилизации процесса консолидации, поэтому она была выбрана для обобщения на пространственный случай и ее дальнейшего развития.

**Во второй главе** представлены основные допущения, уравнения на базе кинематической модели, описывающие напряженное и деформированное состояния водонасыщенного грунта с позиций теорий упругости и наследственной линейной вязкоупругости без учета старения материала. В упругом варианте система уравнений сводится к системе дифференциальных уравнений эллиптического типа, которая от известных уравнений Ляме отличается дополнительными слагаемыми, учитывающими вклад поровой воды, что позволило ее назвать системой обобщенных уравнений Ляме. В вязкоупругом варианте имеем систему интегро-дифференциальных уравнений.

*Основные допущения:*

1. Рассматриваются водонасыщенные грунты с наличием в порах гидравлически непрерывной воды.

2. Относительные деформации твердой (индекс  $s$ ) и жидкой (индекс  $l$ ) фаз малы  $|\epsilon_i^s| \leq 0,01; |\epsilon_i^l| \leq 0,01$  ( $i=1,2,3$ ), в одной геометрической точке по модели находятся две материальные точки: жидкая и твердая. Сплошность тела обеспечивается применением соотношений Коши к каждой из фаз.

3. Для скелета грунта справедливы шесть гипотез теории упругости. Касательные напряжения по модели возникают только в скелете грунта.

4. Для поровой воды вводится гипотеза о линейной связи между частной производной от остаточного избыточного порового давления и относительной линейной деформацией вдоль каждой из координатных осей и указывается на линейную связь между относительной деформацией и изменением относительной пористости вдоль координатной оси. Вместо равенства давлений на горизонтальных и боковых площадках поровая вода по модели

наделается свойством, согласно которому они разные, как и у скелета грунта. Гипотеза однородности сохраняется, вместо изотропности вводится ортотропность, например, механические постоянные поровой воды в случае полуразложившегося торфа вдоль остатка стебля и поперек различны, различие сохраняется при выборе направлений вдоль пласта и поперек пласта, поэтому свойства воды, помещенной в поры грунта, отличаются от свойств обычной воды. Линейная наследственная теория вязкоупругости применяется не только к физическим уравнениям для скелета грунта, но и к уравнениям состояния поровой воды. В вязкоупругом варианте модели для скелета грунта используется закон Больцмана, для поровой воды вводится аналог закона Больцмана.

5. Взаимодействие двух фаз описывается кинематической гипотезой, согласно которой одна фаза освобождает часть своего объема для другой фазы, поэтому относительные линейные деформации скелета грунта и поровой воды вдоль каждой из координатных осей противоположны по знаку и прямо пропорциональны.

*Постановка задачи.* Система уравнений кинематической модели включает: уравнения равновесия (1) с учетом объемных сил  $K$ , физический закон Гука с измененными (за счет наличия в порах воды) механическими характеристиками (2), физические уравнения состояния для поровой воды (3), уравнения Коши (4), кинематические уравнения взаимодействия фаз (5).

Растягивающие нормальные напряжения в скелете грунта, сжимающие — в поровой воде считаются положительными, поэтому сумме напряжений отвечает выражение  $\sigma_{ij}^s - \sigma_{ij}^l \delta_{ij}$ . Вдоль каждой координатной оси приращение суммарного нормального напряжения уравнивается приращением касательного напряжения, возникающего в скелете грунта. Используется суммирование по повторяющемуся индексу. Система уравнений имеет вид:

$$(\sigma_{ij}^s - \sigma_{ij}^l \delta_{ij})_{,j} + K_i = 0, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ii}^s = (2G + b_i) \varepsilon_{ii}^s + \lambda \theta, \quad \theta = \varepsilon_{ij}^s \delta_{ij}, \quad b_i = \frac{E_i^l}{\kappa_i^2}, \quad \sigma_{ij}^s = G \varepsilon_{ij}^s, \quad i \neq j, \quad (2)$$

$$P_{ij}^I = E_i^I \epsilon_{ij}^I \delta_{ij}, \quad P_{ij}^I = h_i \sigma_{ij,j}^I \delta_{ij}, \quad (3)$$

$$\epsilon_{ij}^s = \frac{I}{2} (u_{i,j}^s + u_{j,i}^s), \quad \epsilon_{ij}^I = u_{i,j}^I \delta_{ij}, \quad (4)$$

$$\epsilon_{ii}^s = -\kappa_j \epsilon_{ij}^I \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где  $u_i^s, u_i^I$  — перемещения твердой и жидкой фаз,

$$G = \frac{E^s}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E^s}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$E^s$  — модуль деформации,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $G$  — модуль сдвига,  $\lambda$  — постоянная Ляме вводятся для скелета грунта, безразмерные параметры  $\kappa_i$ , размерные параметры  $h_i$  (м),  $E_i^I$  (Мпа) описывают возможную ортотропию поровой воды. Все параметры модели определяются из эксперимента с двухфазным образцом или из лотковых, или из натурных испытаний.

Путем преобразований уравнений равновесия (1) получилась система дифференциальных уравнений, записанная через перемещения частиц скелета грунта (индекс  $s$  опущен):

$$-\left[ (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + G \Delta u_i + b_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \delta_{ij} + c_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right] = K_i, \quad c_i = \frac{E_i^I}{h_i \kappa_i}, \quad (6)$$

которая от известных уравнений Ляме отличается двумя дополнительными слагаемыми в каждом уравнении с параметрами  $b_i, c_i$ .

Введем три дифференциальных вектора — оператора: а) опера-

тор Ляме  $A = (G + \lambda) \text{graddiv} + G \Delta$ ; б) оператор  $B = \left( b_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)_{i=1}^3$ , который

отражает изменение трех диагональных элементов в тензоре чет-

вертого ранга механических постоянных; в) оператор  $C = \left( c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{i=1}^3$ ,

соответствующий уравнениям состояния для поровой воды (3).

Для конечной односвязной, ограниченной кусочно гладкой поверхностью, пространственной области на части поверхности (водопроницаемой) избыточные остаточные поровые давления обращаются в нуль, статическое граничное условие записывается только для скелета грунта и смешанные граничные условия имеют вид:

$$u|_{S_1} = 0, \quad t^{(v)}|_{S_2} = q(x_1, x_2), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} t^{(v)} &= \sum_{i,k=1}^3 \left( \sigma_{ik} + b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \cos(v, x_k) e_i = \\ &= \sum_{i,k=1, k \neq i}^3 ((2G + b_i) \varepsilon_i + \lambda \varepsilon_{ik} + \sigma_{ik}) \cos(v, x_k) e_i. \end{aligned} \quad (8)$$

$t^{(v)}$  – оператор напряжений в скелете грунта, который отличается от аналогичного оператора теории упругости изменением механических постоянных за счет слагаемых  $b_i$ . Кинематическое граничное условие является главным, статическое — естественным.

Запишем вязкоупругий вариант одномерной кинематической модели.

По закону Больцмана для физических уравнений имеем

$$\varepsilon^s(t) = \int_0^t P_s(t-\tau) d\sigma^s(\tau), \quad \varepsilon^l(t) = \int_0^t P_l(t-\tau) dP^l(\tau),$$

где  $P_s(t), P_l(t)$  — функции ползучести.

Введение в систему уравнений (1) - (5) соответствующих интегральных соотношений приводит к системе интегро-дифференциальных уравнений.

В изображениях по Лапласу — Карсону на основании теоремы Бореля свертка двух функций заменяется произведением их изображений

$$[\varepsilon^s(t)]^* = [P_s(t)]^* [\sigma^s(t)]^*, \quad [\varepsilon^l(t)]^* = [P_l(t)]^* [P^l(t)]^*.$$

В простейшем случае параметры  $\nu, \kappa, h$  будем считать постоянными. Используем правило переобозначений (принцип Вольтерра) для перехода от решения задачи в упругой постановке к решению в вязкоупругой постановке:

$$E^s \rightarrow \frac{I}{[\Pi_s(t)]^*}, \quad E^l \rightarrow \frac{I}{[\Pi_l(t)]^*}, \quad G \rightarrow G^*, \quad \lambda \rightarrow \lambda^*,$$

$$\varepsilon^s \rightarrow (\varepsilon^s)^*, \quad \sigma^s \rightarrow (\sigma^s)^*, \quad \sigma^l \rightarrow (\sigma^l)^*, \quad \varepsilon^l \rightarrow (\varepsilon^l)^*, \quad P^l \rightarrow (P^l)^*,$$

тогда уравнения вязкоупругой задачи в изображениях с точностью до обозначений совпадут с уравнениями (1) - (5) и соответственно (6).

Разделение решения на два этапа для системы фиксированных пространственных точек позволяет отказаться от решения системы интегро-дифференциальных уравнений.

**В третьей главе** записывается работа деформации двухфазного тела и связанные с нею принципы.

Специальная запись физических уравнений для жидкой фазы (3) позволила новые характеристики напряженного состояния жидкой фазы  $P_i^l$  ( $i = 1, 2, 3$ ) методически использовать для описания удельной работы внешних сил, приложенных к жидкой фазе, и записать выражение для приращения  $\delta R_{sl}$  механической работы внешних сил, приложенных к элементарному двухфазному параллелепипеду, в виде

$$\delta R_{sl} = (\sigma_{ij,j}^s \delta u_i^s + \sigma_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij}^s + P_{ij}^l \delta \varepsilon_{ij}^l \delta_{ij} - P_{ij,j}^l \delta u_i^l e_j) dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3.$$

Слагаемое  $-P_{ij,j}^l \delta u_i^l$  описывает диссипацию работы деформации и в диссертации не рассматривается.

Заменяя приращение энергии деформации  $\delta W_{sl}$  полным дифференциалом  $dW_{sl}$ , и используя закон сохранения энергии для обратимой работы внешних сил, запишем выражение для удельной энергии деформации:

$$dW_{sl} = \sigma_{ij,j}^s du_i^s + \left( \sigma_{ij}^s - \frac{I}{\kappa_i} P_{ij}^l \delta_{ij} \right) d\varepsilon_{ij}^s. \quad (9)$$

Согласно определению полного дифференциала получили аналог формул Грина в виде двух групп уравнений, который является математическим описанием закона сохранения энергии:

I группа	II группа
$\frac{\partial W_{sl}}{\partial \varepsilon_{ij}^s} = \sigma_{ij}^s - \frac{I}{\kappa_i} P_{ij}^l \delta_{ij}$	$\frac{\partial W_{sl}}{\partial u_i^s} = \frac{I}{h_i} P_{ij}^l \delta_{ij}$

(10)

В четвертой главе исследуются свойства обобщенного не симметричного оператора Ляме  $D = A + B + C$ , заданного на линейных функциях, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми частными производными в односвязной области  $\Omega$  с кусочно гладкой границей  $S$ . Одно из свойств оператора — положительная определенность в векторных пространствах  $W^{1,2}(\Omega)$ ,  $L_2(\Omega)$ .

Скалярное произведение  $(Du, u')$  представляет сумму трех слагаемых. Для преобразования интегралов по объему применим формулу Остроградского–Гаусса. Первое слагаемое известно:

$$(-Au, u') = - \int_{\Omega} u'_i A_{ij} u_j dx = 2 \int_{\Omega} W^A(u, u') dx - \int_S u'_i l_{ij} u_j dS,$$

$$W^A(u, u') = W^A(u', u), \quad l_{ij} = \lambda n_i \partial_j + G n_j \partial_i + G \delta_{ij} n_k \partial_k,$$

в котором при  $u' = u$  получаем упругий потенциал:

$$W^A(u) = \frac{1}{2} (\lambda \theta^2 + 2G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}), \quad \theta = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}.$$

Два оставшихся слагаемых имеют вид:

$$(-Bu, u') = - \int_{\Omega} u'_i B_{ij} u_j dx = 2 \int_{\Omega} W^B(u, u') dx - \int_S b_i u'_i \delta_{ij} n_j \partial_i u_j dS,$$

$$(-Cu, u') = - \int_{\Omega} u'_i C_{ij} u_j dx = \int_{\Omega} W^C(u, u') dx =$$

$$= - \int_{\Omega} c_i u'_i \delta_{ij} u_{j,j} dx = \int_{\Omega} c_i u'_{i,i} \delta_{ij} u_j dx - \int_S c_i u'_i \delta_{ij} u_j n_i dS. \quad (11)$$

$$W^B(u, u') = \frac{1}{2} b_i \varepsilon_{ii} \varepsilon'_{ii}, \quad W^B(u, u') = W^B(u', u),$$

$$W^C(u, u') = -c_i \varepsilon_{ii} u'_i, \quad W^C(u, u') \neq W^C(u', u).$$

Аналог первой формулы Бетти описывается выражением

$$\int_{\Omega} u'_i D_{ij} u_j dx = 2 \int_{\Omega} \left( W^A(u, u') + W^B(u, u') + \frac{1}{2} W^C(u, u') \right) dx - \int_S u'_i t_{ij} u_j dS. \quad (12)$$

Полагая  $u' = u$ , получим аналог второй формулы Бетти

$$\int_{\Omega} u_i D_{ij} u_j dx = 2 \int_{\Omega} \left( W^A + W^B + \frac{1}{2} W^C \right) dx - \int_S u_i t_{ij} u_j dS. \quad (13)$$

Оставляя только упругий потенциал  $W^A$ , приходим к известным формулировкам двух формул Бетти.

Вычитая из (12) взаимное выражение, получим аналог третьей формулы Бетти, который описывает несимметричность обобщенного оператора Ляме

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u'_i D_{ij} u_j - u_i D_{ij} u'_j) dx = \\ = \int_{\Omega} (W^C(u, u') - W^C(u', u)) dx - \int_S (u'_i t_{ij} u_j - u_i t_{ij} u'_j) dS. \end{aligned} \quad (14)$$

При введении объемных сил по уравнению (6) и учете статических граничных условий (7) имеем

$$\int_{\Omega} (u'_i K_i - u_i K'_i) dx - \int_{S_2} (u'_i q_i - u_i q'_i) dS = \int_{\Omega} (W^C(u, u') - W^C(u', u)) dx. \quad (15)$$

При отсутствии объемных сил и задании в двух точках поверхности сосредоточенных сил  $q(x) = Q\delta(x - y_0)$ ,  $q'(x) = Q'\delta(x - y_1)$  получим

$$u'(y_0) \cdot Q = u(y_0) \cdot Q' + \int_{\Omega} (W^C(u, u') - W^C(u', u)) dx. \quad (16)$$

По теореме Бетти о взаимности работ для упругого тела интеграл по объему отсутствует, несимметричность оператора  $D$  описывается этим интегралом.

На основе уравнений (6), условий (7) введем объемные и поверхностные силы в выражение (13) и запишем аналог формулы Клапейрона

$$\int_{\Omega} u_i K_i dx + \int_S u_i q_i dS = 2 \int_{\Omega} \left( W^A + W^B + \frac{1}{2} W^C \right) dx,$$

в котором правая часть описывает энергию деформации двухфазного тела в виде квадратичных и билинейного функционалов. При сохранении справа только  $W^A$  имеем потенциальную энергию и известную теорему Клапейрона.

*Постановка вариационной задачи.* Обобщенным решением краевой задачи будем считать функцию  $u \in V$ ,  $V = \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$ , удовлетворяющую вариационному равенству (в форме Галеркина)

$$a(u, v) + c(u, v) = (K, v) + \int_{S_2} v \cdot t^{(v)}(u) dS, \quad \forall v \in V, \quad K \in L_2(\Omega), \quad (K, v) \in V^*, \quad (17)$$



$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( (G + \lambda) \theta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + G \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dx, \quad c(u, v) = - \int_{\Omega} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_i dx.$$

Требование обращения в нуль  $v$  на части границы указывается как  $v \in \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$ . Пространство  $V^*$  сопряженное к  $V$ .

В диссертации устанавливаются свойства форм  $c(u, v)$ ,  $d(u, v) = a(u, v) + c(u, v)$  и доказывается теорема о существовании и единственности решения.

**Лемма 1.** Если область  $\Omega$  ограничена, то форма  $d(u, v)$  есть билинейная непрерывная форма на  $V \times V$ .

**Лемма 2.** Для любой открытой области  $\Omega$  и  $S_1 \neq S$  имеем

$$c(u, u) = -\frac{1}{2} \int_{S_2} c_i u_i^2 \cos(v, x) dx, \quad \forall u \in V;$$

$$c(u, v) = -c(v, u) - \int_{S_2} c_i u_i v_i \cos(v, x) dx, \quad \forall u, v \in V.$$

**Теорема.** Пусть  $\Omega$  ограниченная область в  $R^3$  и  $K$  — заданный элемент,  $K \in L_2(\Omega)$ . Тогда задача (17) имеет единственное решение  $u \in V$ .

Таким образом, проекционные методы математической физики, например метод Бубнова — Галеркина, применимы к отысканию решения (17).

В пятой главе рассмотрен класс задач о загрузении различными видами нагрузок вязкоупругой двухфазной полуплоскости и проведено сопоставление с лабораторными и натурными экспериментами.

Отличия в постановках задачи Фламана в теории упругости и в диссертации заключается в том, что в теории упругости задача Фламана рассматривается для неограниченной полуплоскости, а при разложении нормального напряжения на случай двух фаз вводится ограниченная односвязная область.

В полярной системе координат  $(\theta, r)$  введем полуцилиндр малого радиуса  $\rho$  и заменим погонную нагрузку  $F$  радиальными напряжениями  $\sigma_r$ , распределенными по его поверхности (рис. 2).

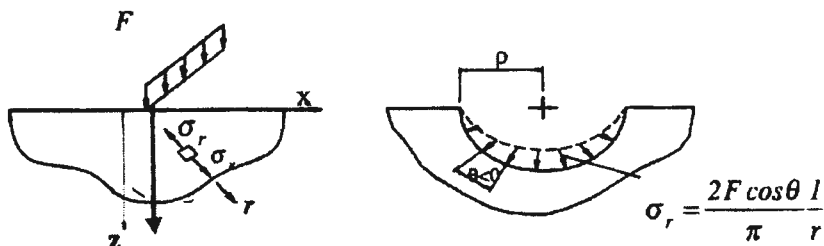


Рис. 2. Замена погонной нагрузки  $F$  радиальными напряжениями.

Нормальные суммарные напряжения

$$\sigma_r = \sigma_r^s - \sigma_r^l, \quad \sigma_r = -\frac{2F \cos \theta}{\pi} \frac{l}{r}, \quad \tau_{r\theta} = \sigma_\theta = 0$$

удовлетворяют уравнениям равновесия и уравнению совместности деформаций в полярной системе координат при нулевых (за исключением точек приложения нагрузки  $F$ ) граничных условиях. Задача Фламана при дополнительных условиях  $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$  является задачей одномерного напряженного состояния, что позволило при разложении радиального напряжения  $\sigma_r$  применить одномерный вариант кинематической модели

$$\sigma_r^s - \sigma_r^l = -\frac{2F \cos \theta}{\pi} \frac{l}{r}, \quad \epsilon_r^s = \frac{l}{E} \sigma_r^s, \quad \epsilon_r^l = \frac{h}{E^l} \frac{\partial \sigma_r^l}{\partial r}, \quad E = E^s + \frac{E^l}{\kappa^2}, \quad (18)$$

$$\epsilon_r^s = \frac{\partial u_r^s}{\partial r}, \quad \epsilon_r^l = \frac{\partial u_r^l}{\partial r}, \quad \epsilon_r^s = -\kappa \epsilon_r^l, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^s - \sigma_\theta^l = 0, \quad \tau_{\theta r} = 0.$$

На дневной поверхности полуплоскости ( $r = \rho$ ) избыточное остаточное поровое давление равно нулю, оно имеется в глубине массива, поэтому жидкость перемещается вдоль радиуса из области повышенного давления в область пониженного противоположно движению частиц скелета грунта. Перемещения частиц поровой воды в направлении, ортогональном радиусу, вызваны поперечными деформациями скелета грунта  $u_r^s$ .

Система уравнений (18) свелась к решению линейного уравнения первого порядка относительно перемещения скелета грунта:

$$\frac{\partial u_r^s}{\partial r} + a^2 u_r^s = -\frac{2F \cos \theta}{\pi E} \frac{l}{r} - a^2 C(\theta), \quad a^2 = \frac{E^l}{Eh\kappa} \left( \frac{l}{m} \right)$$

Для нахождения постоянных интегрирования  $D(\theta)$ , которая появилась в результате решения этого уравнения, и  $C(\theta)$ , которая явилась следствием физического уравнения

$$\varepsilon_r^I = \frac{h}{E^I} \frac{\partial \sigma_r^I}{\partial r},$$

заданы два граничных условия:

$$\sigma_r^I \Big|_{r=p} = 0; \quad u_r^s \Big|_{r=R} = 0.$$

Согласно этим условиям рассматривается ограниченная область  $p \leq r \leq R$ , в которой перемещения и напряжения отличны от нуля.

Решение дифференциального уравнения, описывающего разложение решения Фламана на две фазы, имеет вид:

$$u_r^s = \frac{2F \cos \theta}{\pi E} \left[ e^{-a^2 R} \int_p^R \frac{e^{a^2 r}}{r} dr - e^{-a^2 r} \int_p^r \frac{e^{a^2 r}}{r} dr \right], \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Напряжения в скелете грунта определены по закону Гука

$$\sigma_r^s = -\frac{2F \cos \theta}{\pi} \left[ \frac{1}{r} - a^2 e^{-a^2 r} \int_p^r \frac{e^{a^2 r}}{r} dr \right], \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Первое слагаемое отвечает решению Фламана для однофазного тела, второе слагаемое в скобках описывает разгружающее влияние жидкой фазы.

На основании формулы (20) получены величины  $u_r^I(\mu)$ ,  $\sigma_r^I(\text{МПа})$ .

Из графиков (рис. 3) следует, что жидкая фаза с ростом глубины постепенно принимает на себя общее давление, напряжения в скелете грунта убывают быстрее, чем напряжения, найденные по решению Фламана. При малых суммарных напряжениях  $\sigma_r (r \geq 10)$  напряжения в скелете практически равны нулю, поэтому жидкая фаза сильнее проявляет свои свойства.

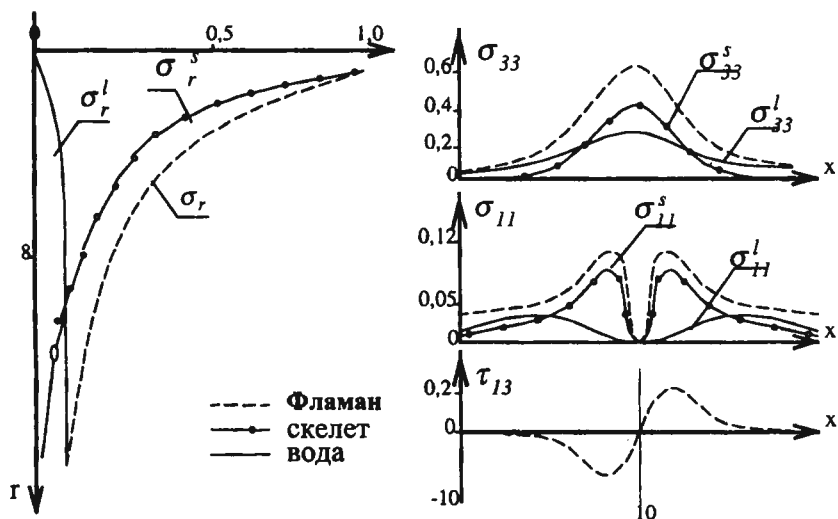


Рис. 3. Радиальные, вертикальные, горизонтальные нормальные и касательные напряжения.

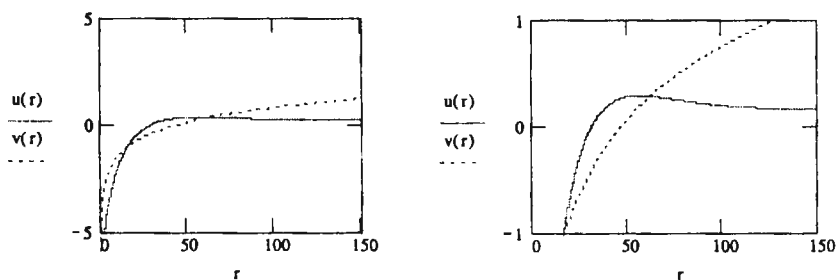


Рис. 4. Вертикальные перемещения точек дневной поверхности по решению Фламана (---), по кинематической модели (—).

График вертикальных перемещений для точек дневной поверхности, отвечающий однофазному телу, показывает существенно медленное убывание по сравнению с графиком функции перемещения, построенной с учетом влияния поровой воды (рис. 4). Влияние жидкой фазы на твердую проявляется в «поднятии» частиц скелета грунта над дневной поверхностью вблизи действия силы с последующим быстрым убыванием до нуля.

Тангенциальные перемещения в скелете грунта имеют вид:

$$u_{\theta}^i = r \sin \theta \int_{\rho}^r \frac{1}{r^2} b(r) dr, \quad b(r) = \frac{2F}{\pi E} \left[ e^{-a^2 R} \int_{\rho}^R \frac{e^{a^2 r}}{r} dr - e^{-a^2 r} \int_{\rho}^r \frac{e^{a^2 r}}{r} dr \right].$$

На основании фундаментального решения (19), (20) получено (совместно с Трефилиной Е. Р.) решение задачи о действии равномерно распределенной нагрузки на двухфазную вязкоупругую полуплоскость, в которой сделан переход от решения в изображениях к оригиналу для фиксированной точки координат по приближенному методу ломаных, проведен в упругом варианте расчет напряженно-деформированного состояния основания автомобильной дороги и массива грунта от действия близко лежащих объектов.

Приведем, например, графики для вертикальных напряжений в жидкой, твердой фазах и по решению Фламана в случае действия равномерно распределенной нагрузки шириной  $2b$  при параметрах  $a^2 = 0,02(1/м)$ ,  $\rho = 0,02м$ ,  $q/\pi = 1МН/м$ ,  $b = 10м$  (рис. 5) в сечениях а)  $z_1 = 0,5b$ , б)  $z_2 = b$ , в)  $z_3 = 1,5b$ . Из рис. 5 следует, что с ростом глубины поровое давление возрастает.

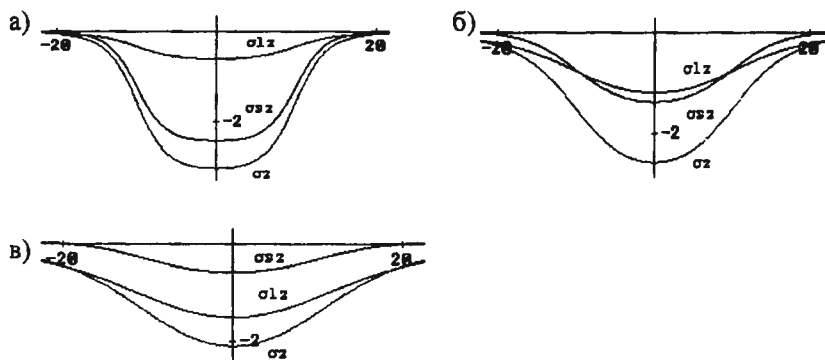


Рис. 5. Вертикальные напряжения.

В сечении  $z = 1,5b$  зафиксировали две точки координат ( $z = 1,5b$ ,  $x=0$ ), ( $z = 1,5b$ ,  $x=b$ ), для которых показано изменение поровых давлений во времени. В упругом решении для  $\sigma_{33}^I(z_3 = 1,5b, x=0)$  в соответствии с принципом Вольтерра применили переобозначе-

ние  $a^2 \rightarrow (a^2(p))^*$ , получили решение вязкоупругой задачи в изображениях:

$$(\sigma'_{33})^* = \frac{2q}{\pi} (a^2)^* \int_{-b}^b \frac{(1,5b)^3}{r^3} e^{-(a^2)^* r} \left[ \ln \frac{r}{\rho} + \int_{\rho}^r \frac{e^{-(a^2)^* \xi} - 1}{\xi} d\xi \right] d\eta, \quad r = \sqrt{\eta^2 + (1,5b)^2}. \quad (21)$$

На основании обработки эксперимента, проведенного Деминым В. А. с образцом из водонасыщенного торфа размерами  $d=0,257$  м и  $h=0,292$  м при давлении на подошве поршня  $\sigma_0=0,01$  МПа и высоте водяного замка 0,3 м, была получена зависимость универсального параметра кинематической модели от времени  $a^2(t)$  в виде ломаной линии с применением функции Хевисайда  $h(t)$ :

$$a^2(t) = a(0) \left( 1 - \sum_{i=0}^5 (\beta_i - \beta_{i+1}) (t - T_i) h(t - T_i) \right), \quad a(0) = 0,581,$$

$$T_0 = \beta_0 = \beta_6 = 0, T_1 = 0,1, T_2 = 1, T_3 = 5, T_4 = 25, T_5 = 60, \beta_1 = 4,068, \quad (22)$$

$$\beta_2 = -0,352, \beta_3 = -0,066, \beta_4 = -0,014, \beta_5 = -7,262 \cdot 10^{-3}, \quad t = \tau / \text{сут.}$$

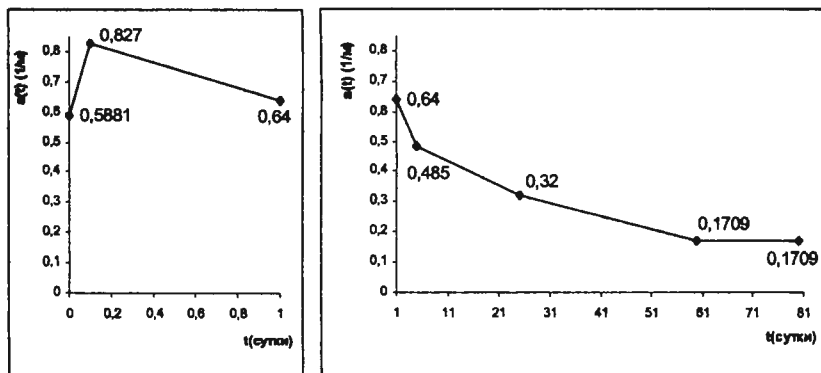


Рис. 6. Универсальный параметр кинематической модели  $a^2(t)$ .

В изображениях по Лапласу-Карсону имеем

$$(a^2(p))^* = p \int_0^{\infty} e^{-pt} a^2(t) dt = a(0) \left( 1 - \sum_{i=0}^5 (\beta_i - \beta_{i+1}) \frac{1}{p} e^{-pT_i} \right), \quad 0 \leq p \leq \infty.$$

На рис.6 показан график этой функции в оригинале.

В соответствии с методом ломаных искомым оригинал  $\sigma_{33}^l(t)$  представляется в виде ломаной линии:

$$\sigma_{33}^l(t) = \sigma(0) \left( 1 - \sum_{i=0}^5 (\gamma_i - \gamma_{i+1}) h(t - T_i) \right), \quad \gamma_0 = \gamma_6 = T_0 = 0,$$

в котором параметры  $\sigma(0), \gamma_i$  — искомые, узлы  $T_i$  — заданы как для функции  $a^2(t)$  или этот сплайн в изображениях по Лапласу-Карсону имеет запись

$$(\bar{\sigma}_{33}^l)^* = \sigma(0) \left( 1 - \sum_{i=0}^5 (\gamma_i - \gamma_{i+1}) \frac{1}{p} e^{-pT_i} \right). \quad (23)$$

Для определения неизвестных параметров составляется система линейных алгебраических уравнений путем совпадения на системе точек  $p_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) ломаной в изображениях (23) с известной правой частью (21)

$$\bar{\sigma}_{33}^{l*}(p = p_j) = \sigma_{33}^{l*}(p = p_j), \quad p_j = \frac{\ln T_j - \ln T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}}, \quad T_0 = 10^{-5}. \quad (24)$$

При  $p = \infty$  слагаемые под знаком суммы в формуле (23) обращаются в нуль, поэтому  $\sigma(0) = \sigma_{33}^{l*}(p = \infty) = 1,206$ . После некоторых преобразований получили систему линейных алгебраических уравнений, порядок которой совпадает с количеством звеньев ломаной линии:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 \gamma_i (e^{-p_j T_{i-1}} - e^{-p_j T_i}) = p_j \left[ \frac{\sigma_{33}^{l*}(p_j)}{\sigma(0)} - 1 \right] \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^5 \gamma_i (T_i - T_{i-1}) = \frac{\sigma_{33}^{l*}(0)}{\sigma(0)} - 1 \end{cases}$$

Последнее уравнение системы отличается от предыдущих, так как соответствует точке  $p=0$ . Матрица системы плохо обусловлена, поэтому был предложен прием по улучшению ее обусловленности, который сводился к уточнению точек коллокаций из решения трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{m} \left( e^{-p_j T_{i-1}} - e^{-p_j T_i} \right) = \left( e^{-p_j T_i} - e^{-p_j T_{i+1}} \right), \quad (25)$$

где  $m$  — натуральное число.

Число  $m$  подбиралось так, чтобы матрица системы имела почти треугольный вид. Согласно численному эксперименту, выполненному Парфеновой Т. В., оптимальное значение  $m=6$ .

В результате решения СЛАУ получили параметры ломаной  $\gamma_1=-0,806$ ,  $\gamma_2=0,122$ ,  $\gamma_3=-0,017$ ,  $\gamma_4=-0,008666$ ,  $\gamma_5=-0,026$ .

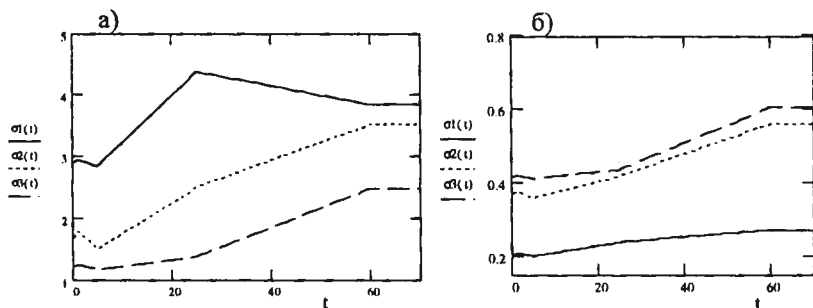


Рис. 7. Изменение поровых давлений во времени.

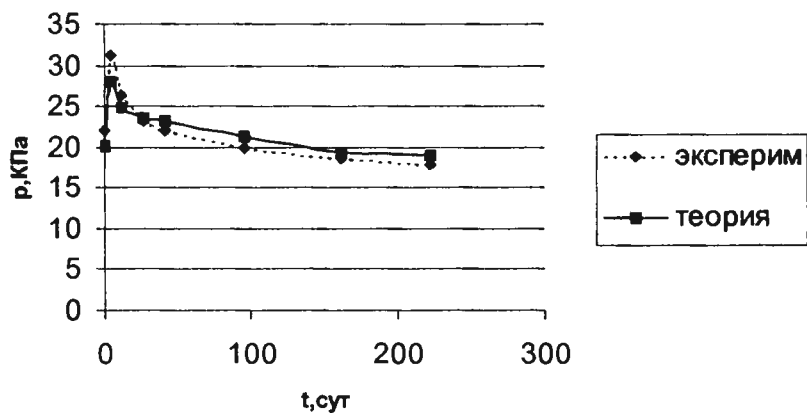
На рис. 7 приводятся графики поровых давлений, изменяющихся во времени, в точках: а)  $x=0$   $z_1=0,5b$  (—),  $z_2=b$  (....),  $z_3=1,5b$  (---) б)  $x=b$   $z_1=0,5$  (—),  $z_2=b$  (.....),  $z_3=1,5b$  (- - -).

Проведено сопоставление решения по кинематической модели с решением Короткина В. Г. по модели фильтрационной консолидации. Сопоставление с этим решением показало качественное сходство для промежуточного во времени состояния процесса консолидации.

Параметры кинематической модели были определены в результате испытания крупногабаритного образца из водонасыщенной глины, затем было сделано сопоставление теоретического прогноза по новой модели с результатами испытания этой глины в лотке, проведенного Набоковым А. В., и с расчетами, полученными по другим моделям. Теория достаточно хорошо согласуется с расчетами и экспериментом.



Сопоставление для датчика №1



Сопоставление для датчика №3

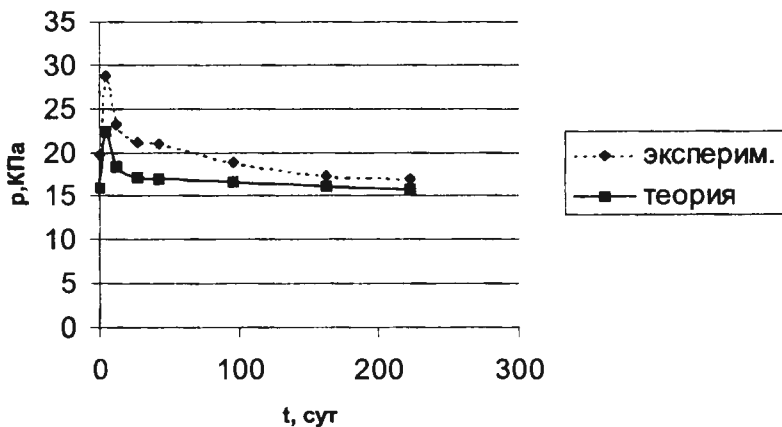


Рис. 8. Сопоставления теоретических значений с экспериментальными.

Сопоставление поровых давлений с экспериментом, проведенным Амаряном Л. С. на образце из водонасыщенного торфа, показало, что наибольшие расхождения наблюдаются в точках

максимума и максимальное из них — 18%, при выходе функции на асимптотическое значение (остаточные поровые давления) расхождение составляет не более 5%.

Была проведена теоретическая обработка натурального эксперимента Зехниева Ф. Ф. по показаниям нижнего датчика порового давления (наиболее удаленный от дневной поверхности). Для двух других датчиков был сделан теоретический прогноз (рис. 8). Максимальное расхождение для среднего датчика № 1 составило 10%, а расхождение по остаточным поровым давлениям — 6,7%. Для верхнего датчика № 3 максимальное расхождение составило 23%, а по остаточным поровым давлениям — 7%.

Таким образом, теория достаточно удовлетворительно согласуется с результатами натурального эксперимента.

В шестой главе рассматривается задача Буссинеска для двухфазного вязкоупругого полупространства (рис. 9). Сосредоточенную силу заменяем радиальными напряжениями  $\sigma_r$ , приложенными к полусфере малого радиуса.

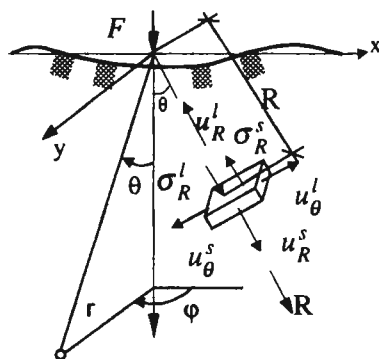


Рис. 9

Боковые нормальные напряжения связаны уравнением  $\sigma_\theta = -\sigma_\phi$ , поэтому они не влияют на радиальную относительную деформацию в упругом случае. Приближенно можно ограничиться только радиальным нормальным напряжением и разложить его на две фазы

$$\sigma_R^s - \sigma_R^l = \sigma_R = -\frac{3F \cos \theta}{2\pi R^2}.$$

Таким образом, в отличие от задачи Фламана разложение на две фазы в задаче Буссинеска явилось приближенным и при-

вело к дифференциальному уравнению относительно радиальных перемещений скелета грунта:

$$\frac{\partial u_R^s}{\partial R} + a^2 u_R^s = -\frac{3F \cos \theta}{2\pi E} \frac{1}{R^2} - a^2 c(\theta, \varphi), \quad a^2 = \frac{E^l \kappa}{(E^s \kappa^2 + E^l) h}.$$

Решением уравнения явилось выражение:

$$u_R^s = \frac{3F \cos \theta}{2\pi E} \left( e^{-a^2 L} \int_{\rho}^L \frac{e^{a^2 R}}{R^2} dR - e^{-a^2 R} \int_{\rho}^R \frac{e^{a^2 R}}{R^2} dR \right), \quad \rho \leq R \leq L.$$

На основании закона Гука для скелета грунта получили

$$\sigma_R^s = -\frac{3F \cos \theta}{2\pi} \left[ \frac{1}{R^2} - a^2 e^{-a^2 R} \int_{\rho}^R \frac{e^{a^2 R}}{R^2} dR \right], \quad \rho \leq R \leq L.$$

Из физического уравнения для жидкой фазы следует

$$\sigma_R^l = \frac{3F \cos \theta}{2\pi} a^2 e^{-a^2 R} \int_{\rho}^R \frac{e^{a^2 R}}{R^2} dR, \quad \rho \leq R \leq L.$$

Графики функций  $u_R^s$ ,  $\sigma_R^s$ ,  $\sigma_R^l$  приведены на рис. 10, 11 при численных значениях параметров модели  $a^2=0,09$ ,  $\rho=0,1$ ,  $L=1$  и единичных сомножителях  $\frac{3F \cos \theta}{2\pi} = 1$ ,  $\frac{3F \cos \theta}{2\pi E} = 1$ .

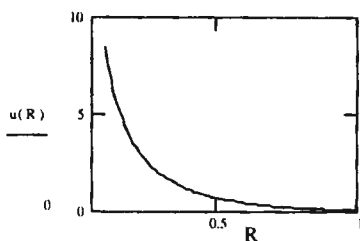


Рис. 10. Радиальные перемещения частиц скелета грунта.

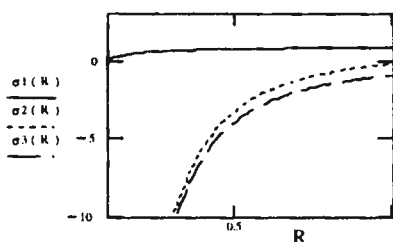


Рис. 11. Радиальные напряжения, отвечающие решению Буссинеска (---), напряжения в скелете (.....), в жидкой фазе(—).

При определении  $u_\theta^s$ , перемещения частиц скелета грунта в направлении ортогонального радиусу, не учитываются нормальные напряжения  $\sigma_\varphi$  и  $\sigma_\theta$ .

На площадке, ортогональной радиусу  $R$  касательные напряжения отсутствуют, поэтому соответствующий угол сдвига равен нулю:

$$\gamma_{\theta R} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_R^s}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^s}{\partial R} = 0.$$

На основании этого равенства после интегрирования получили

$$u_\theta^s = \frac{3F \sin \theta}{2\pi E} \left( A \ln \frac{R}{\rho} - \int_{\rho}^R \frac{\left( e^{a^2 R} \int_{\rho}^R \frac{e^{a^2 t}}{t^2} dt \right)}{R} dR + \ln D \right), \quad A = e^{-a^2 L} \int_{\rho}^L \frac{e^{a^2 R}}{R^2} dR,$$

где  $D$  — постоянная интегрирования, определяемая из условия

$$u_\theta^s \left( \theta = \frac{\pi}{2}, R = \rho \right) = u_R^s (\theta = 0, R = \rho).$$

При  $\theta = \pi/2$ , перемещения  $u_\theta^s$  совпадают с вертикальными перемещениями  $w^s$ , принадлежащими точкам дневной поверхности:

$$w^s = -\frac{3F}{2\pi E} \left( \ln \frac{R}{L} e^{-a^2 L} \int_{\rho}^L \frac{e^{a^2 r}}{r^2} dr + \int_r^L \frac{e^{-a^2 R} \int_{\rho}^r \frac{e^{a^2 t}}{t^2} dt}{R} dr \right).$$

Формулы для радиальных и вертикальных перемещений скелета грунта, принадлежащих точкам дневной поверхности, получены и в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ . Их графики приведены на рис. 12, 13 при единичных сомножителях

$$\frac{(1-2\nu)(1+\nu)F}{2\pi E} = 1, \quad \frac{3F}{2\pi E} = 1 \text{ и параметре } a^2 = 0,09.$$

На рис. 13 показано влияние параметра  $L$ . При его изменении на порядок и  $a^2=0$  вертикальные перемещения, построенные по решению Буссинеска и по кинематической модели при  $L=10$  практически совпадают.

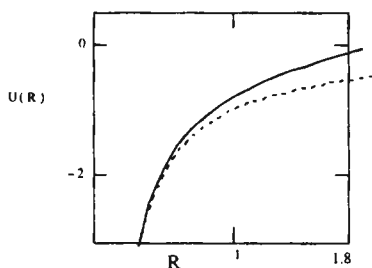


Рис. 12. Радиальные перемещения твердой фазы ( $z=0$ ), определенные по кинематической модели (—), по решению Буссинеска (---).

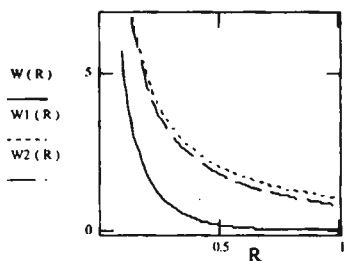


Рис. 13. Вертикальные перемещения частиц скелета грунта ( $z=0$ ) по кинематич. модели при  $L=1$  (—),  $L=10$  (---), по решению Буссинеска (....).

В вязкоупругом варианте кинематической модели физические уравнения для твердой и жидкой фаз и кинематическое уравнение заменяются на вязкоупругие аналоги. Расчетные формулы для радиальных перемещений частиц скелета грунта, порового давления, напряжения в твердой фазе имеют вид:

$$(u_R^s)^* = \frac{3F \cos \theta}{2\pi} \left( \frac{1}{E} \right)^* \left( e^{-(a^2)^* R} \int_{\rho}^L \frac{e^{(a^2)^* R}}{R^2} dR - e^{-(a^2)^* R} \int_{\rho}^L \frac{e^{(a^2)^* R}}{R^2} dR \right),$$

$$(\sigma_R^l)^* = \frac{3F \cos \theta}{2\pi} (a^2)^* e^{-(a^2)^* R} \int_{\rho}^L \frac{e^{(a^2)^* R}}{R^2} dR,$$

$$(\sigma_R^s)^* = -\frac{3F \cos \theta}{2\pi} \left( \frac{1}{R^2} - (a^2)^* e^{-(a^2)^* R} \int_{\rho}^L \frac{e^{(a^2)^* R}}{R^2} dR \right).$$

Используя зависимость универсального  $a^2(t)$  параметра в виде ломаной (22), представим на рис. 14, 15 изменение во времени поровых давлений.

Сначала рост пространственной координаты сопровождается ростом порового давления (рис. 14). Начиная с глубины 1 м, рост пространственной координаты вызывает его убывание (рис. 15). Возрастание (убывание) во времени  $\sigma_R^l$  объясняется двумя графиками  $\sigma_R^l(R)$  вдоль оси OZ ( $\theta = 0$ , рис. 16). Верхний график

отвечает начальному  $a^2(t=0)=0,581$ , нижний - стабилизированному значению  $a^2(t=t_{cm})=0,174$ .

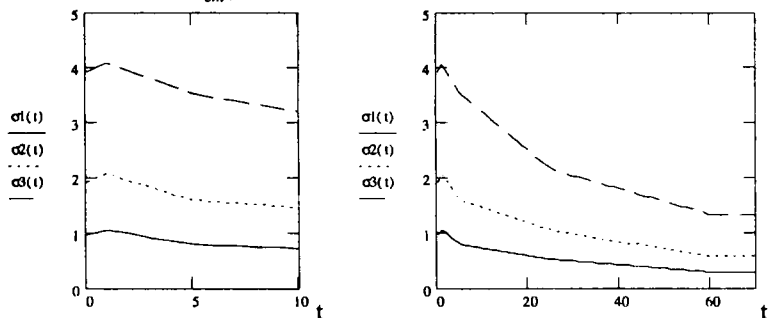


Рис. 14. Изменение во времени для точек вертикальной оси:  
 $R=0,12$  м (—),  $R=0,15$  м (.....),  $R=0,15$  м (- - -).

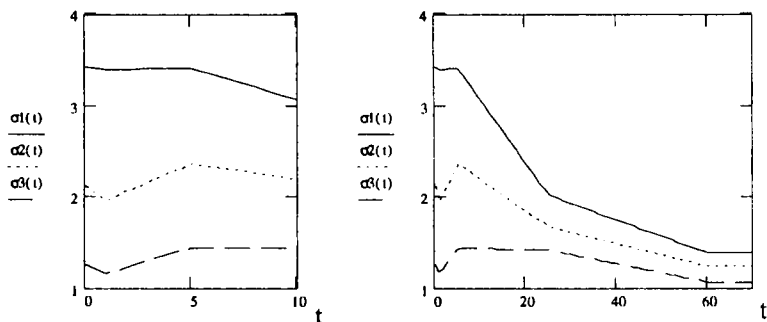


Рис. 15. Изменение во времени для точек вертикальной оси:  
 $R=1$  м (—),  $R=2$  м (.....),  $R=3$  м (- - -).

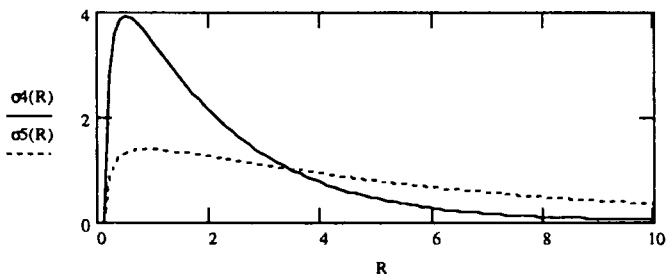


Рис. 16. Поревое давление  $\sigma'_R$  в момент времени  $t=0$  (—),  $t=t_{cm}$  (.....).

Особенностью двухфазного тела является то, что при неизменной во времени внешней нагрузки взаимодействие полей напряжений в твердой и жидкой фазах происходит немонотонно во времени (рис. 14, 15). Суммарное радиальное напряжение в жидкой и твердой фазах убывает как в решении Буссинеска. Радиальные перемещения частиц твердой фазы дневной поверхности, найденные по кинематической модели убывают быстрее в полтора раза, чем найденные по решению Буссинеска.

Применение фундаментального решения задачи Буссинеска для двухфазного упругого полупространства выполнено Трефилиной Е. Р. при решении задач о загрузке дневной поверхности упругого двухфазного полупространства равномерно распределенной нагрузкой по прямоугольной и круговой площадкам.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. После окончания процесса консолидации моделирование напряженного и деформированного состояния водонасыщенного грунта с учетом остаточных избыточных поровых давлений сводится к системам двух или трех линейных дифференциальных уравнений, являющихся обобщением известных уравнений Ляме и отличающихся от них дополнительными слагаемыми, описывающими влияние поровой воды. Процесс консолидации грунта описывается с помощью системы интегро-дифференциальных уравнений, решение которой осуществляется в два этапа.

2. Предлагаются методики обработки испытаний образца или массива из водонасыщенного грунта для определения механических характеристик водонасыщенного грунта (параметров моделей), часть из которых описывается немонотонными функциями, зависящими от времени.

3. Показано, что обобщенный дифференциальный оператор Ляме является положительно определенным и отвечающая оператору смешанная краевая задача разрешима. Несимметричность оператора привела: а) к отсутствию взаимности работ в двухфазном теле; б) к билинейному функционалу (помимо квадратичного) при описании энергии деформации (аналог формулы Клапейрона); в) к формулам типа Грина, отвечающим билинейному функционалу.

4. В задаче Фламана точно, в задаче Буссинеска - приближенно напряженные состояния раскладываются на две фазы. Получены зависимости для напряжений и перемещений в скелете грунта и поровой воде, которые являются фундаментальными решениями двух классов краевых задач: а) расчет двухфазной упругой и вязкоупругой полуплоскости; б) расчет двухфазного упругого и вязкоупругого полупространства. Поровые давления в пространственной задаче являются монотонно возрастающими функциями, поэтому напряжения в скелете грунта убывают быстрее, чем  $\alpha(1/R^2)$ , для задачи Фламана — быстрее, чем  $\alpha(1/R)$ . По модели вместо полуплоскости и полупространства вводятся ограниченные области соответственно в виде полуцилиндра и полусферы конечных радиусов. Из сопоставления вертикальных перемещений точек дневной поверхности для однофазного и двухфазного тел следует, что влияние поровой воды на скелет грунта проявляется в быстром их убывании.

5. Показано приложение решений для произвольно распределенных поверхностных нагрузок. Например, расчет напряженно - деформированного основания от действия близко (не менее 6м) расположенных объектов показал, что с удалением объектов друг от друга нормальные напряжения в скелете грунта, найденные по новой модели, затухают на 40% быстрее, чем напряжения, найденные по решению Фламана, что привело к уменьшению осадок скелета грунта на 26% по сравнению с тем же решением.

6. Проведены сопоставления решений по новой модели с решением по модели фильтрационной консолидации, с решениями по теории упругости, с результатами лабораторных и натурно-го экспериментов. Расчеты по модели для стабилизированного состояния с учетом остаточных избыточных поровых давлений достаточно хорошо (максимальное расхождение 7%) и по модели для консолидации водонасыщенного грунта удовлетворительно (до 24%) согласуются с известными результатами.



### Публикации по теме диссертации

1. Степанова Т. В. Модель механики грунтов с кинематическим описанием взаимодействия фаз / Л. Е. Мальцев, Т. В. Степанова, Е. Р. Трефилина. Сб. «Итоги исследований» ТИММС СО РАН № 5, Тюмень, - 1994. - С. 35 - 42.
2. Stepanova T. V. Simulation of soil with kinematics phase relationship / L. E. Mal'tsev, T. V. Stepanova, E. R. Trefilina. Transaction of TIMMS № 5, Tyumen, 1994. - P. 33 - 40.
3. Мальцева Т. В. Учет конечной скорости загрузки вязкоупругого образца / Т. В. Мальцева, В. И. Шалабодов // Проблемы экологии и энергосбережения в условиях Западной Сибири. Сб. докл. Международ. конф. ТюмГАСА, М., 1999. - С. 399-404.
4. Мальцева Т. В. Загружение двухфазной вязкоупругой полуплоскости полосовой нагрузкой // Моделирование технологических процессов бурения, добычи нефти и газа и обустройство сопровождающих объектов на основе современных технологий. Материалы II Всероссийской научно-практич. конф. ТюмГНГУ. Тюмень, 2000. - С. 55-58.
5. Мальцева Т. В. Фундаментальное решение задачи Фламана для двухфазной вязкоупругой полуплоскости // Известия вузов. Нефть и газ. 2000. № 2. - С. 72-78.
6. Мальцева Т. В. Учет гидростатического давления в поровой воде по кинематической модели / Т. В. Мальцева, Т. В. Парфенова // Актуальные проблемы строительства и экологии Западно-Сибирского региона. Сб. докл. научно-практ. конф., посвящ. 30-летию ТюмГАСА. - М., 2000. - С. 305-313.
7. Мальцева Т. В. Расчет двухфазного основания по кинематической модели // Актуальные проблемы строительства и экологии Западно-Сибирского региона. Сб. докл. науч.-практ. конф., посвящ. 30-летию ТюмГАСА. -М.: 2000. - С. 301-305
8. Мальцева Т. В. Кинематическая модель и ее приложение к задаче Фламана / Л. Е. Мальцев, Т. В. Мальцева // Упругость и неупругость. Материалы Межд. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 90-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. М.: Изд-во МГУ. 2001. - С. 306-309.
9. Мальцева Т. В. Действие сосредоточенной силы на двухфазное упругое полупространство // Известия вузов. Нефть и газ. - 2001. - № 1. - С. 73-79.

10. Мальцева Т. В. Экспериментальное определение параметров кинематической модели для водонасыщенного образца грунта / Л. Е. Мальцев, Т. В. Мальцева, В. А. Демин // Известия вузов. Нефть и газ. - 2001. - № 2. - С. 96-102.

11. Мальцева Т. В. Изменение во времени напряжений в двухфазном полупространстве // Известия вузов. Нефть и газ. - 2001. - № 3. - С. 62-68.

12. Мальцева Т. В. Зависимость напряжений от времени при действии равномерно распределенной нагрузки на двухфазную полуплоскость / Т. В. Мальцева, Е. Р. Трефилина // Известия вузов. Нефть и газ. - 2001. - № 4. - С. 102-108.

13. Мальцева Т. В. Экспериментальное определение параметра в упругом варианте кинематической модели грунта / В. Ф. Бай, Т. В. Мальцева, А. В. Набоков // Известия вузов. Нефть и газ. - 2001. - № 5. - С. 81-87.

14. Мальцева Т. В. Механические характеристики двухфазного образца / В. Ф. Бай, Т. В. Мальцева, А. В. Набоков // Известия вузов. Нефть и газ. - 2002. - № 1. - С. 98-106.

15. Мальцева Т. В. Новая методика определения параметров теории фильтрационной консолидации / В. Ф. Бай, Т. В. Мальцева, А. В. Набоков // Известия вузов. Нефть и газ. - 2002. - № 2. - С. 103-106.

16. Мальцева Т. В. Влияние точек совпадений в методе ломаных на обусловленность матрицы / Т. В. Мальцева, Т. В. Парфенова // Известия вузов. Нефть и газ. - 2002. - № 3. - С. 101-105.

17. Мальцева Т. В. Кинематическая модель грунта и биоматериалов / Л. Е. Мальцев, В. Ф. Бай, Т. В. Мальцева. СПб.: Стройиздат СПб, 2002. - 336 с.

18. Мальцева Т. В. Удельная потенциальная энергия двухфазного тела // Академические чтения Н. А. Цытовича, 2-е Денисовские чтения. Материалы Международного Совещания заведующих кафедрами Механики грунтов, Инженерной геологии, Оснований и фундаментов и Подземного строительства МГАСУ. М., 2003. - С. 89-94.

19. Мальцева Т. В. Немонотонность функций, описывающих свойства вязкоупругих грунтов / Т. В. Мальцева, В. А. Демин // Академические чтения Н. А. Цытовича, 2-е Денисовские чтения. Материалы Межд. совещания заведующих кафедрами Механики

грунтов, Инженерной геологии, Оснований и фундаментов и Подземного строительства МГАСУ. М., 2003. - С. 154-157.

20. Мальцева Т. В. Взаимовлияние двух фундаментов в двухфазной полуплоскости / Т. В. Мальцева, Е. Р. Трефилина // Известия вузов. Нефть и газ. - 2003. - № 2. - С. 102-107.

21. Мальцева Т. В. Теорема о взаимности работ в двухфазном теле // Известия вузов. Нефть и газ. - 2003. - № 4. - С. 92-96.

22. Мальцева Т. В. Экспериментальная установка для испытания грунта методом одноостного сжатия / В. Ф. Бай, Л. Е. Мальцев, Т. В. Мальцева, А. В. Набоков, В. А. Демин. Патент на изобретение № 2213952 от 10.10.2003. Науч.-исслед. отделение по подготовке официальных изданий Федерального института промышленности. М., Г-59, ГПС-5, 123995.

23. Мальцева Т. В. Введение функционала для решения обобщенной системы уравнений Ляме // Вестник ТГУ. - 2003. - № 5. - С. 196-201.

24. Мальцева Т. В. Основные теоремы механики двухфазных грунтов // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Труды VI Межд. науч.-технич. конферен. Петербургского государственного университета путей сообщения. - СПб.: ПГУПС, 2004, - С. 254-262.

25. Мальцева Т. В. Моделирование с помощью уравнений эллиптического типа процесса консолидации двухфазного тела. - Саранск: Средневолжское матем. общество, 2004. - препринт № 62, - 23 с.

26. Мальцева Т. В. Некоторые модели процесса консолидации двухфазных сред // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники: Труды Междунар. конф. Ульяновск. - Изд. УГТУ, Т. 7. - 2004. - С. 133-143.

27. Мальцева Т. В. Разложение удельной энергии двухфазного тела / Л. Е. Мальцев, Т. В. Мальцева. // Прикладная математика и механика: сб. науч. тр. вып. 6. Ульяновск. - Изд. УГТУ. - 2004. - С. 155-166.

28. Мальцева Т. В. Моделирование двухфазного тела с учетом несущей способности жидкой фазы / Т. В. Мальцева, Е. Р. Трефилина // Математическое моделирование. 2004. - Т. 16. - № 11. - С. 47-60.

29. Мальцева Т. В. Модель несущей способности жидкости в двухфазной пористой среде // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 28. Модели механики сплошной среды. Материалы XVII сессии Межд. Школы по моделям механики сплошной среды, 4-10 июля 2004 г. - Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2004. - С. 142-149.

30. Мальцева Т. В. Консолидация двухфазного вязкоупругого основания / Т. В. Мальцева, А. В. Набоков, Т. В. Парфенова // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 28. Модели механики сплошной среды. Материалы XVII сессии Межд. Школы по моделям механики сплошной среды, 4-10 июля 2004 г. - Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2004. - С. 150-155.

31. Мальцева Т. В. Энергетический метод расчета напряженно-деформированного состояния двухфазного тела // Тр. математического центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 28. Модели механики сплошной среды. Материалы XVII сессии Межд. Школы по моделям механики сплошной среды, 4-10 июля 2004 г. - Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2004. - С.137-141.

32. Мальцева Т. В. Основные свойства обобщенного оператора Ляме // Естественные и технические науки. М.: Спутник+. 2005. - Вып. 6. - С. 87-94.

Подписано в печать 20.01.2006. Тираж 100 экз.  
Объем 2,25 уч.-изд. л. Формат 60х84/16. Заказ 5.

---

Издательство Тюменского государственного университета  
625000, г. Тюмень, ул. Семакова, 10  
Тел./факс (3452) 46-27-32  
E-mail: izdatelstvo@utmn.ru





